

17^{ème} Colloque inter-IREM Épistémologie

Nancy, 23-24 mai 2008

“ LA FIGURE ET LA LETTRE ”

Colloque organisé par la Commission Inter-IREM Épistémologie et histoire des mathématiques et l'IREM de Nancy, en collaboration avec les Archives Poincaré, la MSH de Nancy et la Commission inter-IREM Géométrie

Jeudi 22 mai 2008

20 h 30 : Conférence “grand public” : Philippe Lombard : La figure en perspective
IUT du Bd. Charlemagne

Vendredi 23 mai 2008

8 h 30 – 9 h 30 : Accueil des participants

9 h 30 : Conférence d'ouverture : Gerhard Heinzmann : Perception, visualisation, intuition
10 h 45 : discussion

11 h : pause

11 h 15 : exposés en parallèle

Rudolf Bkouche : Le calcul géométrique,

Caroline Jullien : Densité syntaxique et densité sémantique en mathématiques : de l'usage de la figure et de la lettre,

Sinègre Luc, Hamel Thierry & Warusfel André : Un texte de René Descartes sur les sections circulaires : Un mini-traité cartésien sur les cônes

Nicolas Rouche : Quelle géométrie enseigner aux futurs instituteurs : la science des figures ?

Klaus Volkert : A quoi ça sert la figure? Le problème des polytopes réguliers de l'espace à quatre dimensions.

12 h : repas

14h : ateliers en parallèle

Bruno Alaplantive & Raphaël Mizrahi : Calcul du volume de la pyramide, de la décomposition de la figure au calcul infinitésimal,

Evelyne Barbin & René Guitart : L'écriture des relations entre les droites selon leurs grandeurs et leurs directions : les équipollences de Bellavitis,

Lubet & Friedelmeyer Jean-Pierre : La subversion de la figure par la lettre et la construction d'une analyse algébrique au 18^e siècle,

Martine Bühler & Anne Michel-Pajus (Groupe MATH) : Histoire des nombres complexes et utilisation en classe,

Sinègre Luc, Hamel Thierry & Warusfel André : Quelques preuves et quelques reconstructions pour mieux comprendre la lettre de Descartes sur les cônes.

Frédéric Vivien : Etude historique des courbes de transition employées dans la construction de routes.

17h : pause

17h30 : exposés en parallèle :

Olivier Bruneau : Enseigner la méthode des fluxions avec ou sans figure ? : le cas de Maclaurin,
Joëlle Delattre : Lettres et points de repères dans la représentation plane géocentrique du mouvement planétaire avant Ptolémée,
Thomas De Vittori : La Caractéristique géométrique de G.W.Leibniz,
Henri Plane : Changeons d'aire,
Benoît Jadin : La gauche et la droite du centre.

20 h : Repas de gala

Samedi 24 mai 2008

8 h 30 : conférence plénière : Philippe Nabonnand : La disparition des figures en géométrie au début du 19^{ème} siècle.

9 h 30 : conférence plénière : René Guitart : Figures, lettres et preuves.

10 h 45 : discussion

11 h : pause

11 h 15 : exposés en parallèle

François Charquois : Histoire de diagrammes
André-Jean Glière : De la diversité des démonstrations des formules d'addition au XIX^e siècle,
Carole Ququ : L'émergence des structures au sens de Bourbaki : la notion de forme en procès (dans le texte mathématique),
Pauline Romera-Lebret : Le triangle à la fin du XIXe siècle : une figure ancienne pour des méthodes nouvelles,

12 h : déjeuner

14h : ateliers en parallèle

Dominique Bénard : Entr'expressions
Anne Boyé : Figures et lettres de la géométrie analytique,
Frédéric Brechenmacher : L'articulation lettre-tableau dans l'élaboration du caractère opératoire de la représentation matricielle (1850-1930),
Renaud Chorlay : Möbius : du calcul barycentrique à la bande unilatère,
Jean-Paul & Jacqueline Guichard : Le symbolisme chez Hérigone : figure, lettre ou chiffre,
Anne-Marie Marmier : Naissance des quaternions.

17h : Réunion de la CII Épistémologie

Rudolf Bkouche

USTL, Lille

Exposé : Le calcul géométrique

Leibniz critique la géométrie analytique de Descartes parce qu'elle oublie la géométrie derrière les calculs. C'est cette critique qui le conduit à chercher ce qu'il appelle la caractéristique géométrique (qui n'est qu'un cas particulier de la caractéristique universelle) que l'on peut considérer comme un calcul portant sur les objets. Ce calcul butera sur la question de la définition des objets géométriques et ne sera pas publié du vivant de Leibniz.

La critique de Leibniz sera reprise par Poncelet (je ne sais si Poncelet connaissait le travail de Leibniz) dans l'énoncé de ses deux principes de la géométrie analytique, et on peut considérer que l'un des objectifs de Poncelet, et plus généralement des promoteurs de la géométrie projective, est de construire le calcul géométrique dont rêvait Leibniz.

En même temps que se mettait en place la géométrie projective apparaissait des formes de calcul géométrique, d'abord avec la représentation géométrique des nombres complexe ensuite avec le calcul linéaire. Ce calcul linéaire se présente de deux façons, d'une part le calcul vectoriel tel que nous le connaissons aujourd'hui et d'autre part le calcul linéaire qui porte sur les objets mathématiques (points, lignes, surfaces, volumes) et que développera Grassmann.

Carolie Jullien

Archives Poincaré et IHPTS

Exposé : Densité syntaxique et densité sémantique en mathématiques : de l'usage de la figure et de la lettre

La densité syntaxique et la densité sémantique sont des réquisits établis par Goodman lors de son investigation méthodique des fonctionnements des systèmes symboliques (Nelson Goodman *Langages de l'art*, Nîmes: Chambon 1968). Ces réquisits lui permettent d'une part de distinguer les systèmes notationnels des systèmes non notationnels mais, d'autre part, ils sont aussi répertoriés par Goodman comme symptômes de l'esthétique. Au cours de cet exposé, je me propose de présenter les réquisits en question et d'explicitier leur statut de symptômes de l'esthétique dans un cadre mathématique. Je montrerai en particulier comment le passage de l'usage de la figure à celui de la lettre en mathématique se traduit en termes de substitution d'un système syntaxiquement dense par un système sémantiquement dense. L'ambition étant de montrer comment cette substitution sert la cognition, en permettant par exemple de contourner des difficultés conceptuelles, tout en contribuant à la valeur esthétique des mathématiques.

Luc Sinègre, Thierry Hamel & André Warusfel

Rouen...

Exposé : Un texte de René Descartes sur les sections circulaires : Un mini-traité cartésien sur les cônes

Entre avril et septembre 1641, Descartes rédige en latin une solution à un problème géométrique qui aurait été posé à la communauté mathématique par Desargues. Mydorge et Roberval auraient donné également chacun une solution dont on se sait rien aujourd'hui. La *Propositio* démontrée par Descartes s'énonce ainsi : *tout cône ayant pour courbe directrice une conique admet au moins une section planecyclique*.

La stratégie de l'auteur est très simple, au moins dans son principe : traiter d'abord le problème dans les deux cas où le cône admet au moins un plan de symétrie, puis tenter de généraliser en se ramenant systématiquement au premier d'entre eux (*Tertius casus*).

L'étude du *Tertius* est particulièrement intéressante puisque Descartes applique, sans doute pour la première fois, la géométrie analytique à un problème spatial. La géométrie analytique

plane utilisée est encore toute récente puisque la lettre a été rédigée quatre ans seulement après la publication de *La Géométrie*.

Mais si le recours à un calcul analytique est essentiel pour ramener le troisième cas aux cas précédents on s'attachera à montrer que tout le reste de la démarche de Descartes reste encore dans la pure tradition imitée d'Apollonius.

D'autre part le texte, peut-être incomplet, présente de graves lacunes. Les différentes figures que donnent les éditions successives de la correspondance posent, pour le moins, problème. Le troisième cas n'envisage sérieusement que les cônes à base parabolique. L'auteur semble même utiliser une partie du résultat qu'il prétend démontrer... Ces lacunes sont-elles de réels oublis ou des chausse-trappes laissées en direction de savants rivaux ?

Pour discuter toutes ces questions on est obligé de reconstituer un *Quartus casus* qui rendrait complet le mini-traité. On peut alors prouver que Descartes n'avait pas les moyens de trouver l'équation qui comporte, dans le cas général, quatre-vingt-dix-neuf termes ! Mais, malgré ces restrictions, la démarche très claire et presque algorithmique de l'auteur, sa manière, où s'entremêlent la géométrie nouvelle et la géométrie des Anciens, et enfin le style d'exposition choisi, rendent passionnante la lecture de cette lettre.}

Note : cette conférence est associée à un atelier qui reprendra en détails certaines démonstrations.

Nicolas Rouche

Belgique

Exposé : Quelle géométrie enseigner aux futurs instituteurs : la science des figures ?

La géométrie est, dit-on, la science des figures (avant de devenir celle des espaces abstraits). Certes. Mais si on cherche à comprendre comment elle naît et se développe dans l'environnement quotidien et la pensée commune, on se rend compte qu'elle mobilise des situations et des objets familiers, un va-et-vient entre plan et espace, la verticale et l'horizontale, -- deux directions physiques --, des mouvements, des perceptions, la symétrie du corps humain ... et des figures.

Par quels cheminements la géométrie se distancie-t-elle d'un contexte aussi varié pour se concentrer sur les figures ? C'est une des questions auxquelles nous avons cherché à répondre dans un livre qui servira de référence à notre exposé : *Du quotidien aux mathématiques*. Deuxième volume : géométrie. A paraître aux Editions Ellipses.

Klaus Volkert

Allemagne

Exposé : "A quoi ça sert la figure? - Le problème des polytopes réguliers de l'espace à quatre dimensions"

L'idée d'une géométrie sans figure est très répandue; la géométrie analytique et la géométrie plane synthétique en sont des paradigmes. Mais la géométrie solide pose de nouveau la question des figures et de l'évidence : si on décide travailler d'une manière synthétique on a souvent des problèmes du type : qu'est-ce qu'on peut supposer comme évident ? La géométrie à quatre dimensions nous montre ce problème d'une manière encore plus nette.

Alaplantive Bruno & Mizrahi Raphaël

Toulouse...

Atelier : Calcul du volume de la pyramide, de la décomposition de la figure au calcul infinitésimal.

La formule exprimant le volume d'une pyramide en fonction de l'aire de la base et de la longueur de la hauteur n'est pas aussi simple à justifier que la formule donnant l'aire d'un triangle. La tradition chinoise nous fournit un découpage qui en montre la validité. Plus tard, en Europe, le développement des processus infinitésimaux permet à Legendre et à l'Abbé Tacquet de construire une démonstration qui, à partir d'un découpage différent, fait apparaître un encadrement infinitésimal.

Nous souhaitons discuter et mettre en parallèle ces deux méthodes dans l'atelier, en proposant en même temps plusieurs types de visualisation : construction effective de la pyramide et de ses « morceaux », ou découpage sur ordinateur. Les textes qui seront étudiés ont été présentés en stage de formation continue pour des professeurs du secondaire, suite à des expérimentations en classes de collège et de lycée.

Textes étudiés :

— Chemla, K., Guo, S., *Les neuf chapitres, le Classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, 2 004, chapitre 5 : « Discuter des travaux », page 483.

— Legendre, A. M., *Eléments de géométrie*, Firmin Didot, onzième édition 1817 (pages 184 à 189) et quinzième édition 1849 (pages 197 à 199).

— Tacquet, Abbé, *Eléments de géométrie plane et solide, Livre XII* (propositions V, VI et VII), Anvers, 1654, réédition 1754.

— Grégoire, M., *Histoires des pyramides*, Mnemosyne, Numéro spécial I, M.:A.T.H IREM Paris VII.

Evelyne Harbin & René Guitart

Université de Nantes et Université Paris 7

Atelier : L'écriture des relations entre les droites selon leurs grandeurs et leurs directions : les équipollences de Bellavitis

Les premiers travaux de Giusto Bellavitis sur les équipollences sont publiés dans les années 1830, son ouvrage *Exposition de la méthode des équipollences* paraît en 1854 à Modène et la traduction de Laisant est éditée en 1874. Le propos de Bellavitis est d'établir un calcul sur les droites qui suive les mêmes règles que le calcul des équations. Son « principe fondamental » est que l'on puisse faire sur les équipollences toutes les opérations qui sont légitimes pour les équations algébriques, de sorte que les équipollences qui en résultent soient toujours exactes. Nous étudierons la mise en place de ce calcul et quelques applications. Par exemple, comment une formule algébrique concernant une propriété des points d'une droite donne un théorème relatif aux points d'un plan. Ainsi, de la formule $bd + (b + d + i) i = (b + i) (i + d)$ se déduit le théorème de Ptolémée, mais aussi d'autres théorèmes de géométrie inédits. Nous examinerons également le mémoire que Hoüel consacre au calcul de Bellavitis dans un mémoire de 1869.

Textes étudiés : extraits de *Exposition de la méthode des équipollences* de Bellavitis (1874), *Sur le calcul des équipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis* de Hoüel (1869)

Lubet & Friedelmeyer Jean-Pierre(s)

Lille et Strasbourg

Atelier : La subversion de la figure par la lettre et la construction d'une analyse algébrique au 18^e siècle

Le calcul différentiel et intégral de Leibniz a d'abord pour objectif l'étude des courbes, et ses concepts viennent se former sur la réalité de figures préexistantes. Avec Euler, l'analyse s'érige en une théorie des fonctions, le rôle premier est alors accordé à des « expressions de

calcul », dont Lagrange revendiquera le caractère algébrique, mais qui restent susceptibles d'une interprétation géométrique *a posteriori*. La puissance autonome de la lettre se manifestera plus nettement avec l'introduction par Arbogast, Servois et quelques autres d'un calcul direct sur les « caractéristiques » des opérateurs du calcul différentiel ordinaire et du calcul aux différences finies. Le soutien intuitif de la figure, considérée jusque là comme la principale source de l'évidence géométrique, s'avère insuffisant et suspect en regard de l'indétermination féconde du symbole algébrique. La substitution de la lettre à la figure induit en même temps une réflexion plus générale sur la langue et les signes par lesquels elle s'exprime. Mais cette substitution est souvent mal fondée, et elle suscite les interrogations et les critiques qui vont conduire, avec Cauchy, à une nouvelle conception de la rigueur analytique.

Textes étudiés : morceaux choisis dans les œuvres de Leibniz, d'Alembert, Euler, Lagrange, Condillac, Bürmann, Arbogast, Laplace, Servois...

Martine Bühler (Groupe MATH)

Atelier : Histoire des nombres complexes et utilisation en classe.

Au carrefour de l'algèbre et de la géométrie, les nombres dits impossibles apparaissent dans l'*Ars Magna* de Cardan en 1545, puis dans l'*Algebra* de Bombelli et sont le début d'une longue histoire où ils interviennent dans de nombreux domaines. Après avoir fait l'objet de controverses, ils acquerront un nouveau statut avec la représentation géométrique des nombres complexes au début du dix-neuvième siècle.

L'atelier donnera quelques jalons pour cette histoire par la lecture de textes historiques, en particulier de Cardan, Bombelli, Girard et bien sûr Argand. Nous donnerons également des exemples d'utilisation en classe de cette histoire.

Frédéric Vivien

Lycée Corneille, Rouen

Atelier : Etude historique des courbes de transition employées dans la construction de routes.

Après un bref historique sur la construction de routes, une étude des courbes de transition qui y sont employées sera réalisée. Les logiciels de géométrie dynamique permettront d'illustrer les techniques employées par les ingénieurs des Ponts et Chaussées.

On découvrira l'emploi d'arcs de cercles, de paraboles, de cubiques et de *clothoïde*, courbes rencontrées successivement pour permettre les raccordements de lignes droites.

Tout projet de construction de route devant tenir compte des *déblais* et *remblais*, une approche des notions de terrassement sera présentée.

Enfin, toute cette étude a pour but la constitution de devoirs pour le lycée, de la seconde à la terminale, à partir de données fournies par la D.D.E., devoirs pouvant se transposer sur tout autre projet de la D.D.E.

Olivier Bruneau

Centre François Viète, Université de Nantes

Exposé : Enseigner la méthode des fluxions avec ou sans figure ? : le cas de Maclaurin

En prenant appui sur un cours manuscrit de Colin Maclaurin (1698-1746) resté inédit, on tentera de s'interroger sur les pratiques d'enseignement dans la première moitié du 18^{ème} siècle en Grande-Bretagne. La méthode des fluxions donnée par Newton est essentiellement « algébrique » et requiert différentes techniques de calcul, celle proposée par Maclaurin dans son *Treatise of Fluxions* est essentiellement géométrique. Qu'en est-il dans le cours de ce dernier ?

Dans un premier temps, on comparera ce cours avec le *Treatise of Fluxions* et divers écrits sur les fluxions du 18^{ème} siècle. Ainsi on montrera que cet ouvrage n'est même pas considéré comme un manuel par son auteur. De plus, on pointera l'utilisation des figures dans le cours et on regardera comment elles permettent au professeur écossais de faire passer son message. Enfin, nous essaierons de le comparer avec d'autres manuels sur les fluxions et de voir si ce cours se situe dans une manière d'écrire les manuels ou s'il est original.

Joëlle Delattre

Lille

Exposé : Lettres et points de repères dans la représentation plane géocentrique du mouvement planétaire avant Ptolémée.

La « figure mode d'emploi » des sphères mécaniques platoniciennes qui accompagne le texte sur l'astronomie de Théon de Smyrne (II^e s. de n. è.) prétend donner aussi une vue d'ensemble du fonctionnement du système planétaire, à partir des mouvements relatifs de sept cercles de taille et d'inclinaison différente, tous représentés comme des cercles dans le même plan. L'exposé s'appuiera sur une relecture pas à pas du texte en s'attachant à la manière dont les lettres sont progressivement associées aux points définis pour la construction de la figure. La difficile mise en œuvre d'un modèle complexe de représentation de trois mouvements circulaires combinés sera en même temps l'occasion de s'interroger sur les enjeux historiques et philosophiques d'un tel usage didactique de la figure annotée.

Thomas De Vittori

IUFM de Bretagne – Site de Brest .

Exposé : La Caractéristique géométrique de G.W.Leibniz

On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si, en effet, la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par calcul, en faisant la supposition des Éléments, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits.

G.W.Leibniz, La caractéristique géométrique.

C'est par ce constat que débute l'un des textes de Leibniz pour qui, malgré les beaux résultats obtenus par l'approche analytique, il reste à montrer comment les fondements de la géométrie, c'est-à-dire les *Éléments* d'Euclide, peuvent se ramener à de tels calculs. Leibniz doute que cela soit possible et il propose d'inventer un nouveau langage permettant de rendre compte de la situation des divers objets géométriques d'un problème. Il cherche ainsi une discipline qui se situe en amont des *Éléments* d'Euclide et dont ils peuvent être déduits.

À travers quelques passages, nous nous proposons de présenter cette nouvelle théorie que Leibniz nomme la *Caractéristique Géométrique*, ou méthode des caractères, qui annonce les développements de l'*Analysis Situs* et de la topologie.

Henri Plane

Exposé : Changeons d'aire

Il ne s'agit pas d'étudier des textes historiques mais des liens entre des propriétés de mesures et les figures qui ont servi à les établir.

Qu'advierait-il si on choisissait comme unité d'aire celle du triangle équilatéral ? Il est curieux de constater combien de résultats gardent la même forme, qu'ils "reposent" sur un carré ou sur un triangle équilatéral. Bien sûr "*a deux*" (a^2) n'est plus "*a carré*", mais on peut quand même rendre visite aux bases de l'algèbre, au théorème de Pythagore, aux distances, aux aires,... Trop traditionaliste s'abstenir.

Benoît Jadin

Belgique

Exposé : La gauche et la droite du centre.

Pourquoi observe-t-on toujours une moyenne supérieure à la médiane dans les populations de revenus tandis que pour les populations de cotes (examens ou autres), la médiane est toujours supérieure à la moyenne ? C'est un exemple de question mathématique et citoyenne que l'on peut traiter à partir de graphiques et de tableaux.

De l'allure des distributions de fréquence (histogrammes ou graphiques en bâtonnets), on tire des enseignements sur une population et sur les positions relatives des valeurs centrales (mode, moyenne, médiane). On compare des populations à partir des graphiques de fréquences cumulées (fonctions en escalier dans le cas de données non groupées et fonctions continues dans le cas de données groupées) et on caractérise leur dispersion. Les courbes de Lorentz permettent de quantifier l'inégalité pour des populations de revenus.

François Chargois

UHP et Archives Poincaré Nancy

Exposé : Histoires de diagrammes.

Dans les années cinquante se répand l'usage, dans les textes mathématiques, notamment en théorie des catégories, en algèbre homologique, en topologie algébrique, de petits dessins, bientôt baptisés diagrammes. A l'origine simples auxiliaires du discours mathématique, destinés à étayer une argumentation algébrique, de même qu'une figure peut venir soutenir et éclairer un raisonnement géométrique, ces diagrammes accèdent rapidement, par les travaux d'Alexandre Grothendieck tout particulièrement, au statut d'objet mathématique.

L'exposé tentera de retracer ce cheminement.

André-Jean Glière

IUFM d'Angers

Exposé : De la diversité des démonstrations des formules d'addition au XIX^e siècle

Lazare Carnot propose en 1801 dans son essai : *De la corrélation des figures de géométrie* et en 1803 dans son livre : *Géométrie de position* une méthode géométrique originale pour démontrer les formules d'addition. Grâce à la corrélation des figures, il peut écrire des formules d'addition, quelle que soit la position des points sur le cercle trigonométrique. Avant lui, à notre connaissance, seul Adrien Legendre a cherché à étendre au cercle tout entier les formules d'addition, démontrées initialement sur le premier quart de cercle. Après lui, de nombreux géomètres comme Antonio Cagnoli, Sylvestre Lacroix ou Augustin Cauchy, s'essaient à généraliser les formules trouvées. Nous exposerons les différentes méthodes géométriques utilisées et nous tenterons de montrer que le problème de la généralisation des formules d'addition est lié à celui du statut des quantités négatives ou, pour reprendre une expression de Hermann Grassmann, à « la considération du négatif en géométrie ».

Carole Ququ

Archives Poincaré

Exposé : L'émergence des structures au sens de Bourbaki : la notion de forme en procès (dans le texte mathématique)

L'exposé a pour objectif d'analyser en quel sens, à partir de la fin des années trente, Bourbaki ou certains de ses représentants, affirment que langage et créativité mathématique sont explicitement liés. Il s'agira de s'interroger sur le travail de théorisation mathématique.

Doit-on le concevoir seulement sous l'angle de l'uniformisation du formel (au sens large) et tel qu'on le présente le plus souvent en dehors des mathématiques ? Ne trouve-t-on pas plutôt, si l'on reprend la caractérisation de la nature du raisonnement mathématique selon Chevalley comme “métamathématique”, un jeu entre aspect syntaxique — “la lettre” — et aspect sémantique ? Cette étude épistémologique nous permettra de dire comment les “formes abstraites”, les structures mathématiques, émergent dans/par un texte mathématique polymorphe.

Pauline Romera-Lebret

Centre François Viète, Facultés des Sciences, Nantes Cedex

Exposé : Le triangle à la fin du XIX^e siècle : une figure ancienne pour des méthodes nouvelles

A la fin du XIX^e siècle, une nouvelle géométrie du triangle est développée. Des mathématiciens commencent, en 1873, par trouver de nouveaux points, droites et cercles particuliers. Ils finiront par créer un chapitre véritablement nouveau de la géométrie. Cette nouvelle géométrie du triangle servira, en outre, à l'enseignement de nouvelles géométries comme la géométrie des transformations.

Nous expliquerons comment une figure aussi ancienne que le triangle a été exploité pour le développement et l'enseignement de nouvelles géométries.

Nous montrerons en particulier que c'est l'étude approfondie de cette figure qui a entraîné une maturation des résultats obtenus depuis 1873, obtenue par une globalisation et une maturation. En résumé il s'agira de survoler la construction d'un chapitre nouveau de la géométrie à travers 4 grandes étapes: recherches – développement - organisation - enseignement.

Luc Sinègre, Thierry Hamel & André Warusfel

Rouen...

Atelier : Quelques preuves et quelques reconstructions pour mieux comprendre la lettre de Descartes sur les cônes

Dans sa lettre sur les sections circulaires, René Descartes, distingue plusieurs cas. Dans le *Primus casus*, il ne donne que la synthèse et la construction finale, laissant au lecteur le soin de retrouver l'analyse. On essaiera, le plus honnêtement possible et avec les outils du dix-septième siècle de se conformer aux souhaits de l'auteur. Plusieurs chemins sont possibles et seront évoqués. En revanche, pour le *Tertius casus*, Descartes a laissé les traces précises de l'analyse qu'il avait effectuée. Il faut donc, dans ce cas, combler les vides. On découvrira alors qu'Apollonius n'est pas loin. Cet atelier commencera donc par un rappel de la définition des coniques selon Apollonius. On montrera que finalement tout repose, en termes modernes, sur l'existence d'un invariant, qui éclaire justement plusieurs passages obscurs de la lettre. On envisagera, pour finir, comment on a traité, au dix-neuvième siècle, le problème des sections circulaires, et comment on peut en rédiger une preuve simple et moderne

Note : cet atelier complète la conférence intitulée : Une lettre de René Descartes sur les sections circulaires Un mini-traité cartésien sur les cônes.

Textes étudiés : Lettre de Descartes (A.T. III 1899 p.708-714), Coniques d'Apollonius (surtout Ver Eecke I), Conoïdes et Sphéroïdes d'Archimède (Ver Eecke I p.157-163).

Dominique Bénard

UFR Sciences, Le Mans

Atelier : Entr'expressions

Par la lecture de quelques extraits de la « Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole », on proposera de rentrer dans la dynamique du travail mathématique réalisé par G.W. Leibniz au cours de son séjour parisien. La méthode des « métamorphoses », la correspondance entre triangle arithmétique et triangle harmonique, l' « élégant symbolisme » du cercle, figure des angles, et de l'hyperbole, figure des rapports, y sont autant de moments importants dans la constitution d'une trame entr'expressive des figures, des caractères, des séries. Ainsi pourra se dégager une image saisissante de la pensée leibnizienne qui transforme le point mathématique en *point de vue expressif* sur une *variation*, certes pure position sans *extension* mais enveloppant alors des séries d'*intensités*.

Anne Boyé

Lycée de grand Air, La Baule

Atelier: Autour de la géométrie analytique

La géométrie analytique, qui semble aller de soi aujourd'hui, est l'aboutissement d'un long cheminement, et d'un profond bouleversement des objets et des démarches géométriques.

A partir de quelques textes fondateurs, nous tenterons de répondre aux questions : Qu'y a-t-il d'analytique dans la géométrie analytique ? Est-ce de la « vraie » géométrie ? Est-ce la géométrie des coordonnées ? Est-ce un moyen sûr de résoudre un problème de géométrie ? Pourquoi parle-t-on d'équation de courbe ?

Géométrie sans figure ? Bâton des aveugles ?

Cet atelier sera aussi une manière d'aborder la géométrie analytique, trop souvent rebaptisée repérage, telle qu'elle est introduite actuellement dans nos classes de collèges et lycées.

Textes étudiés : Descartes-Lamy, Euler, Lacroix

Frédéric Brechenmacher

Laboratoire Mathématiques Lens, Université d'Artois

Atelier: L'articulation lettre-tableau dans l'élaboration du caractère opératoire de la représentation matricielle (1850-1930).

L'élaboration des procédés opératoires associés à la représentation matricielle donne un exemple d'interaction entre préoccupations d'enseignement et de recherche en mathématiques. Entre 1900 et 1930, de jeunes enseignants chercheurs comme Autonne, de Séguier, Lattès ou Chatelet prêtent aux matrices des vertus pédagogiques qui leur permettent d'exposer leurs recherches les plus récentes dans des traités d'enseignement. Ces préoccupations pédagogiques interrogent directement la recherche sur des questions nouvelles et impulsent le développement de la théorie des matrices canoniques. Elles sont à l'origine de l'élaboration de pratiques donnant un caractère opératoire à des représentations imagées que Picard désignait encore en 1910 comme des « dessins » et qui, dans les années 1930 envahissent les traités de mathématiques. L'élaboration de telles pratiques, qui articulent des procédures associées à des lettres (calcul symbolique, décompositions polynomiales) et à des tableaux (analogies géométriques en termes de rectangles, diagonales etc., arithmétique des lignes et colonnes) à des valeurs pédagogiques de simplicité et de généralité, est à l'origine du caractère universel que prendra la notion de matrice au sein d'une théorie internationale dans les années 1930. Nous nous attacherons particulièrement au rôle des valeurs pédagogiques prêtées à l'articulation lettre-tableau dans le cadre de l'élaboration d'une culture mathématique commune entrelaçant des pratiques élaborées dans des communautés et réseaux distincts sur une longue période (1850-1930).

Textes étudiés :

An introduction to the theory of canonical matrices, Turnbull et Aitken, 1932.

The theory of Matrices, Mac Duffey, 1933.

On the intersections, contacts and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates, Sylvester, 1850.

The theory of matrices, Cayley 1858.

Zur Theorie der bilinearen Formen, Weyr 1890.

Théorie des diviseurs élémentaires et applications, Sauvage, 1891.

Extraits de textes de Poincaré et Jordan (1880-1890).

Sur les formes mixtes, Autonne, 1905.

Sur la théorie des matrices, de Séguier 1907.

Sur la réduction des substitutions linéaires, Lattes, 1912.

Leçons de théorie des nombres, Chatelet, 1913.

Renaud Chorlay

Atelier : Möbius : du calcul barycentrique à la bande unilatère.

S'il est resté célèbre pour la « bande de Möbius », le mathématicien et astronome August Möbius (1790-1868) a aussi introduit en 1827 un nouveau calcul géométrique, le « calcul barycentrique » ; ce calcul n'est ni la géométrie analytique (déjà classique) ni la géométrie vectorielle (encore à venir).

Textes étudiés :

(1) le début du traité sur le *Calcul Barycentrique* (1827)

(2) des éléments de la lecture par Möbius des travaux de Grassmann, en particulier sur ce que nous appelons le produit scalaire et le produit vectoriel.

(3) des passages du texte sur la bande de Möbius : on verra que ce travail, apparemment éloigné de tout contexte barycentrique ou vectoriel, est lui aussi enraciné dans la pratique du calcul géométrique.

Jacqueline & Jean-Paul Guichard

Collège Mendès France & Lycée Ernest Pérochon, Parthenay,

Atelier : Le symbolisme chez Hérigone : figure, lettre ou chiffre.

Le projet d'Hérigone, réalisé dans son Cours de mathématique (1634) « démontré d'une nouvelle, brève et claire méthode, par notes réelles et universelles, qui peuvent être entendues facilement sans l'usage d'aucune langue » préfigure ceux de Leibniz et de Peano.

Nous étudierons, à travers des extraits de son cours, les choix faits par Hérigone pour fabriquer un langage mathématique universel : figure, lettre ou chiffre. Ce qui nous amènera à nous interroger sur la représentation des objets et concepts mathématiques : arbitraire ou porteur de sens, lettre ou figure...

Textes étudiés :

Des extraits du Cours de mathématiques d'Hérigone (1634)

Mise en parallèle avec des extraits de textes de Viète, Descartes, Leibniz, Peano...

Anne-Marie Marmier

USTL Lille

Atelier : Naissance des quaternions

Au XIX^{ème} siècle, les constructions géométriques planes font progresser l'acception de la réalité des quantités imaginaires mais la fragilité des bases logiques de leur statut perdure. Un autre problème reste pendant, celui de l'extension du calcul géométrique à l'espace.

R.W Hamilton, à la recherche d'un concept de nombre abstrait résout ces deux questions en créant un système algébrique nouveau connecté à la géométrie. Pour lui, l'algèbre n'est pas qu'un système de signes et sa construction se développe entre une problématique algébrique formelle fondée sur les propriétés des opérations et l'idée ancienne du nombre comme rapport de deux grandeurs homogènes, qui convoque les transformations géométriques (similitudes). L'atelier analysera ce va et vient entre calcul sur les lettres, et contexte géométrique soutenu par quelques figures

Textes étudiés : des extraits de Lectures on quaternions et de Elements of quaternions